Universidad Nacional de Rosario

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cálculo III (LM-PM)

Segundo Examen Parcial - 23/11/2017

Alumna/o: .... Carrera: LM - PM

1. Utilizar el cambio de variables $x = u^{1/3}v^{2/3}$, $y = u^{2/3}v^{1/3}$ para hallar el área de la región R acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2x}$, $3y = x^2$, $4y = x^2$.

2. Considerar el campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (2x\ cos(y); -x^2\ sen(y))$.

   a) Verificar que F es conservativo.

   b) Sea $\gamma : [1, 2] \to \mathbb{R}^2$ el camino definido por $\gamma(t) = \left(e^{t-1}; sen(\pi/t)\right)$. Calcular la integral de línea:

   $$\int_\gamma 2x\ cos(y)dx - x^2\ sen(y)dy$$

3. Calcular el volumen del casquete esférico limitado por:

   $$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$
   $$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$
   $$x^2 + y^2 = z^2$$

   con $z \geq 0$, $0 < a < b$.

4. Calcular la integral de línea

   $$\oint_C \left(2y + \sqrt{1 + x^5}\right) dx + \left(5x - e^{y^2}\right) dy,$$

   a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$.

5. La densidad en un punto (x, y) sobre una lámina semicircular

   $$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq r^2\right\}$$

   es $f(x, y) = a\sqrt{x^2 + y^2}$. Calcular el centro de masa de la lámina.

6. Hemos visto que el área de la región interior a la hipocloide de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ es $\frac{3}{8}\pi$. Considerar la curva $\alpha(\theta) = (cos^3(\theta), sen^3(\theta))$ con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (el trozo de hipocloide en el primer cuadrante). Obtener la integral de línea de $F(x, y) = (-y, x)$ a lo largo de la curva de ecuación α sin hacer el cálculo específico de esta integral.